רמזים לפתרון החלק האמריקאי

שאלה 1

כאשר $x > 0$ לפונקציה $f(x) = x - x\ln x - \arctan x$

א. יש בדיוק שני שורשים.

ב. יש בדיוק שלושה שורשים.

ג. יש בדיוק שורש אחד.

ד. אין שורשים.

ה. יש בדיוק ארבעה שורשים.

רמזים לפתרון:

מתקיים כי $f(1) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$ וגם $f(e) = -\arctan e < 0$.

f רציפה ב $[1, e]$ ולכן לפי משפט עה"ב קיימת $c \in (1, e)$ כך ש $f(c) = 0$.

כלומר לפונקציה יש לפחות שורש אחד כאשר $x > 0$.

נחשב את הנגזרות: $f'(x) = 1 - \ln x - x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1} = -\ln x - \frac{1}{x^2+1}$.

כמו כן, $f''(x) = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0$ כי לכל $x > 0$ מתקיים:

$$-\frac{1}{x} + \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} < 0 \iff \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} < \frac{1}{x} \iff 2x^2 < \left(x^2+1\right)^2 \iff 2x^2 < x^4 + 2x^2 + 1 \iff 0 < x^4 + 1$$

כלומר הנגזרת השנייה אינה מתאפסת ולכן לפי מסקנות רול יש בדיוק פתרון אחד.

שאלה 2

נתונים האינטגרלים המוכללים

$$I=\int_1^\infty \frac{1-\cos^2 x}{\arctan x}dx, \qquad II=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x(1-\sin^2 x)}dx$$

א. שני האינטגרלים המוכללים מתכנסים.

ב. שני האינטגרלים המוכללים אינם מתכנסים.

ג. I אינו מתכנס ו II מתכנס.

ד. I מתכנס ו II אינו מתכנס.

רמזים לפתרון:

נבדוק התכנסות האינטגרל $I=\int_1^\infty \frac{1-\cos^2 x}{\arctan x}dx$.

מכיון ש $\arctan x$ חסומה מלמעלה ע"י $\frac{\pi}{4}$ אז $\frac{1-\cos^2 x}{\arctan x} > \frac{1-\cos^2 x}{\frac{\pi}{4}}$ ולכן לפי מונוטוניות האינטגרל המסוים נקבל,

$$\int_1^\infty \frac{1-\cos^2 x}{\arctan x}dx > \int_1^\infty \frac{1-\cos^2 x}{\frac{\pi}{4}}dx = \frac{4}{\pi}\int_1^\infty \sin^2 x dx$$

נחשב ונקבל כי

$$\int_1^\infty \sin^2 x dx = \int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_1^t = \infty$$

$\frac{1-\cos^2 x}{\arctan x}, \sin^2 x > 0$ והאינטגרל המוכלל $\frac{4}{\pi}\int_1^\infty \sin^2 x dx$ מתבדר.

ולכן לפי מבחן השוואה ראשון גם האינטגרל המוכלל $\int_1^\infty \frac{1-\cos^2 x}{\arctan x}dx$ מתבדר.

נבדוק את התכנסות האינטגרל $II=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x(1-\sin^2 x)}dx$

לפי כללי האריתמטיקה ומכיוון ש $\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1-\sin^2 x)}=1$ וגם $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{L}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$.

נחשב את הגבול:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x(1-\sin^2 x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{(1-\sin^2 x)} = 1$$

כלומר האינטגרל $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x(1-\sin^2 x)}dx$ אינו אינטגרל מוכלל כי הפונקציה $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x(1-\sin^2 x)}$ רציפה וחסומה ב $(0,1)$.

ולכן האינטגרל מתכנס.

שאלה 3

אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ אז:

א. סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ חסומים.

ב. אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

ג. הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} a_n^n$ מתכנס.

ד. אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2 a_n$ מתכנס אז גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ה. הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ מתכנס.

רמזים לפתרון:

א. דוגמא נגדית: $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ סדרת הסכומים החלקיים של הטור היא:

$$S_n = \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) =$$

$$= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln(n+1) - \ln n =$$

$$= \ln(n+1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

כלומר סדרת הסכומים החלקיים אינה חסומה.

ב. דוגמא נגדית: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ מתקיים ש $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ והטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס (לייבניץ) אבל הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ אינו מתכנס.

ג. הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n^2} a_n^n\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n^n|$. מכיוון ש $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 < 1$.
לכן לפי מבחן השורש הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n^n|$ מתכנס ומכאן שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} a_n^n$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

ד. דוגמא נגדית: $a_n = \frac{1}{n}$. מתקיים שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n}$ מתכנס,
כי לפי מבחן השוואה גבולי מכיון שהגבול $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = 1$ והטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס אז גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n}$ מתכנס אבל $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ לא מתכנס.

ה. דוגמא נגדית: $a_n = \begin{cases} \frac{1}{\ln n} & n > 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$.

הסדרה שואפת לאפס אבל הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ לא מתכנס לפי מבחן האינטגרל,

נתבונן בפונקציה $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ שהיא רציפה חיובית ויורדת לאפס בקטע $[2, \infty)$,

נבדוק התכנסות האינטגרל $\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$.

נשתמש בהצבה $t = \ln x$ ולכן $dt = \frac{1}{x} dx$ נקבל $\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int\limits_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t} dt$,

נחשב את האינטגרל ונקבל

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \lim_{x \to \infty} \int\limits_{\ln 2}^{x} \frac{1}{t} dt = \lim_{x \to \infty} \ln t \Big|_{\ln 2}^{x} = \infty$$

שאלה 4

הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(1+\ln(\sqrt{1+t}))dt}{x\sin^2 x}$$

הוא:

א. 1 **ב.** 0 **ג.** לא קיים אף במובן הרחב **ד.** ∞ **ה.** $-\infty$

רמזים לפתרון:

הגבול $\lim_{x\to 0}\int_0^{x^2}(1+\ln(\sqrt{1+t}))dt=0$ וגם $\lim_{x\to 0}x\sin^2 x=0$.

המונה והמכנה שואפים לאפס וגם x^2 גזירה,

לכן אפשר להפעיל את כלל לופיטל, תוך שימוש במשפט היסודי שתנאיו מתקיימים, נקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(1+\ln(\sqrt{1+t}))dt}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\ln(\sqrt{1+x^2})\right)2x}{\sin^2 x+2x\sin x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\ln(\sqrt{1+x^2})}{\frac{1}{2x}\cdot\sin^2 x+\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\ln(\sqrt{1+x^2})}{\sin x\left(\frac{\sin x}{2x}+\cos x\right)}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1+\ln(\sqrt{1+x^2})}{\sin x\left(\frac{\sin x}{2x}+\cos x\right)}=\frac{1}{"0^-"\left(\frac{1}{2}+1\right)}=-\infty \text{ ו } \lim_{x\to 0^+}\frac{1+\ln(\sqrt{1+x^2})}{\sin x\left(\frac{\sin x}{2x}+\cos x\right)}=\frac{1}{"0^+"\left(\frac{1}{2}+1\right)}=\infty.$$

ולכן הגבול לא קיים גם במובן הרחב.

שאלה 5

ערך האינטגרל $\int_{-2}^{2}(\ln(1+t^2)\sin^3 t+1)dt$

א. 0 **ב.** 1 **ג.** 2 **ד.** 3 **ה.** 4

רמזים לפתרון:

הפונקציה $f(t)=\ln(1+t^2)\sin^3 t$ היא פונקציה אי זוגית ולכן $\int_{-2}^{2}(\ln(1+t^2)\sin^3 t)dt=0$.

לכן,

$$\int_{-2}^{2}(\ln(1+t^2)\sin^3 t+1)dt=\int_{-2}^{2}1\cdot dt=4$$